第六章
線性微分方程組

習題 6-1

試證下列向量函數爲已知微分方程組的解.

1. $\begin{array}{l} x_1'(t)=x_1(t)+4x_2(t) \\ x_2'(t)=x_1(t)+x_2(t) \end{array}$, $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

解：首先將微分方程組寫成矩陣微分方程式.

$$\mathbf{x}'(t)=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)，其中$$

$$\mathbf{x}'(t)=\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{x}'(t)=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

將已知向量函數 $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ 代入微分方程組中，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2e^{-t}+4e^{-t} \\ -2e^{-t}+\ e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}=\mathbf{x}'(t)$$

故 $\mathbf{x}(t)$ 爲已知微分方程組的解.

3. $\mathbf{x}'(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$，$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} -\cos t \\ e^t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t \\ \cos t+\sin t \end{bmatrix}$

解：微分 $\mathbf{x}(t)$，得

$$\mathbf{x}'(t)=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}-\cos t\\ e^t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin t\\ e^t-\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\\ -\sin t+\cos t\end{bmatrix}$$

將 $\mathbf{x}(t)$ 代入微分方程組中，得

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos t\\ e^t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\cos t+\cos t+\sin t\\ -\cos t+e^t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\\ 2\cos t-\cos t-\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin t\\ e^t-\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\\ -\sin t+\cos t\end{bmatrix}$$

$=\mathbf{x}'(t)$

故 $\mathbf{x}(t)$ 為已知微分方程組的解.

下列每一個已知向量爲微分方程組的解，試證每一個向量可作爲一基本集合，並寫出微分方程組的通解.

5. $\mathbf{x}_1(t)=\begin{bmatrix}2e^{3t}\\ e^{3t}\end{bmatrix}$，$\mathbf{x}_2(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}$，$\mathbf{x}'(t)=\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$

解：因 $W(t)=\det(\mathbf{x}_1(t),\ \mathbf{x}_2(t))=\begin{vmatrix}2e^{3t}&-2e^{-t}\\ e^{3t}&e^{-t}\end{vmatrix}=2e^{2t}+2e^{2t}=4e^{2t}\neq 0$

所以，$\mathbf{x}_1(t)$ 與 $\mathbf{x}_2(t)$ 爲線性獨立解，因此可作爲一基本集合.

故微分方程組的通解爲 $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}2e^{3t}\\ e^{3t}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}$

習題 6-2

利用矩陣的特徵值解下列微分方程組.

1. $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$，$\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

解：係數矩陣之特徵多項式爲

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)-2=(\lambda-4)(\lambda-1)$$

故特徵值爲 $\lambda_1=1$ 與 $\lambda_2=4$，其所對應之特徵向量分別爲 $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. 故此微分方程組之通解爲

$$\mathbf{x}(t)=c_1e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+c_2e^{4t}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1e^t+2c_2e^{4t} \\ c_1e^t-\ c_2e^{4t} \end{bmatrix}$$

因初期值之條件爲 $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，故

$$\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} c_1+2c_2 \\ c_1-\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

則

$$\begin{cases} c_1+2c_2=1 \\ c_1-\ c_2=-1 \end{cases}$$

解得 $c_1=-\dfrac{1}{3}$，$c_2=\dfrac{2}{3}$，故初期值問題的解爲

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3}e^t+\dfrac{4}{3}e^{4t} \\ -\dfrac{1}{3}e^t-\dfrac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix}$$

4. 求下列微分方程組的通解

$$x_1'=3x_1-18x_2$$
$$x_2'=2x_1-9x_2$$

解：微分方程組之矩陣表示式爲

$$\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

係數矩陣之特徵值為 $\lambda_1=\lambda_2=-3$. 其所對應之特徵向量為 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$. 故微分方程組之解為

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}e^{-3t}$$

設微分方程組之另一解為

$$\mathbf{x}_2=(\mathbf{c}+t\mathbf{v})e^{\lambda t}$$

上式中之常數向量 $\mathbf{c}$ 為 $(-3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\mathbf{c}=\mathbf{v}$ 的解.

令 $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$, 則

$$\left(\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

或
$$\begin{bmatrix}-6 & 18\\ -2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

解得 $c_1=-\dfrac{1}{2}$, $c_2=0$. 所以 $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$.

故
$$\mathbf{x}_2=\left(\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}t\right)e^{-3t}$$

於是微分方程組之通解為

$$\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}e^{-3t}+c_2\left(\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}t\right)e^{-3t}$$

利用矩陣對角線化解下列微分方程組.

5. $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\mathbf{x}$，$\mathbf{x}'(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

解：係數矩陣之特徵方程式爲

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3\\ -4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)-12$$

$$=\lambda^2-6\lambda-7=(\lambda+1)(\lambda-7)$$

故特徵值爲 $\lambda_1=-1$ 與 $\lambda_2=7$. 其所對應之特徵向量爲 $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，得 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}$

令 $\mathbf{x}=\boldsymbol{P}\mathbf{u}$，則 $\mathbf{x}'=\boldsymbol{P}\mathbf{u}'$，且 $\mathbf{u}'=\boldsymbol{D}\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_1\\ 7u_2\end{bmatrix}$

此方程組之解爲 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}c_1e^{-t}\\ c_2e^{7t}\end{bmatrix}$

所以方程組 $\mathbf{x}=\boldsymbol{P}\mathbf{u}$ 之解爲

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1e^{-t}\\ c_2e^{7t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3c_1e^{-t}+c_2e^{7t}\\ 2c_1e^{-t}+2c_2e^{7t}\end{bmatrix}$$

因初期值條件爲 $\mathbf{x}'(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$，故

$$\mathbf{x}'(0)=\begin{bmatrix}3c_1+7c_2\\ -2c_1+14c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

則 $\begin{cases}3c_1+7c_2=1\\ -2c_1+14c_2=-1\end{cases}$

解得 $c_1=\frac{3}{8}$，$c_2=-\frac{1}{56}$，因此初期值問題的解爲

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} -\frac{9}{8}e^{-t}-\frac{1}{56}e^{7t} \\ \frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{28}e^{7t} \end{bmatrix}$$

習題 6-3

利用未定係數法求下列微分方程組的通解.

1. $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

解：係數矩陣之特徵方程式爲

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=0$$

故係數矩陣之特徵值分別爲 $\lambda=-1$ 與 $\lambda=3$. $\lambda=-1$ 所對應之特徵向量爲 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，故齊次微分方程組之解爲 $\mathbf{x}_1=e^{-t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 又 $\lambda=3$ 所對應之特徵向量爲 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，故齊次微分方程組之另一解爲 $\mathbf{v}=e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

於是，齊次微分方程組 $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$ 之通解爲

$$\mathbf{x}_c=c_1e^{-t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令微分方程組之特解爲 $\mathbf{x}_p=\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$，則

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1+4p_2\\p_1+p_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

解得 $p_1=-5$，$p_2=1$，故 $\mathbf{x}_p=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$.

所以，微分方程組之通解爲 $\mathbf{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$.

4. $x_1'+x_1+3x_2'=1$，$x_1(0)=0$
$3x_1+x_2'+2x_2=t$，$x_2(0)=0$

解：由 $3x_1+x_2'+2x_2=t$，解得 $x_2'=-3x_1-2x_2+t$ 代入 $x_1'=1-x_1-3x_2'$ 中，則

$$x_1'=1-x_1-3(-3x_1-2x_2+t)=8x_1+6x_2+1-3t \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

又

$$x_2'=-3x_1-2x_2+t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

由 ① 與 ② 式寫成矩陣之形式，

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&6\\-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-3t\\t\end{bmatrix}$$

或

$$\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}8&6\\-3&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1-3t\\t\end{bmatrix}$$

係數矩陣之特徵方程式爲

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-8&-6\\3&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+2=0$$

故特徵值爲 $\lambda_1=3+\sqrt{7}$ 與 $\lambda_2=3-\sqrt{7}$. 所對應之特徵向量分別爲

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-6\\5-\sqrt{7}\end{bmatrix} \text{ 與 } \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-6\\5+\sqrt{7}\end{bmatrix}.$$

故齊次微分方程組之通解爲

$$\mathbf{x}_c = c_1 e^{(3+\sqrt{7})t}\begin{bmatrix} -6 \\ 5-\sqrt{7} \end{bmatrix} + c_2 e^{(3-\sqrt{7})t}\begin{bmatrix} -6 \\ 5+\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

令非齊次微分方程組之特解爲 $\mathbf{x}_p = (\boldsymbol{P}t + \boldsymbol{Q})$ 代入微分方程組中，得

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}(\boldsymbol{P}t + \boldsymbol{Q}) + \begin{bmatrix} 1-3t \\ t \end{bmatrix}$$

則

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8p_1 + 6p_2 \\ -3p_1 - 2p_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 8q_1 + 6q_2 \\ -3q_1 - 2q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-3t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8p_1 + 6p_2 - 3 \\ -3p_1 - 2p_2 + 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 8q_1 + 6q_2 + 1 \\ -3q_1 - 2q_2 \end{bmatrix}$$

得方程組，

$$8p_1 + 6p_2 - 3 = 0$$

$$-3p_1 - 2p_2 + 1 = 0$$

與

$$p_1 = 8q_1 + 6q_2 + 1$$

$$p_2 = -3q_1 - 2q_2$$

解得 $p_1 = 0$，$p_2 = \frac{1}{2}$，$q_1 = -\frac{1}{2}$，$q_2 = \frac{1}{2}$. 故 $\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(t+1) \end{bmatrix}$.

所以，非齊次微分方程組之通解爲

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p \\ &= c_1 e^{(3+\sqrt{7})t}\begin{bmatrix} -6 \\ 5-\sqrt{7} \end{bmatrix} + c_2 e^{(3-\sqrt{7})t}\begin{bmatrix} -6 \\ 5+\sqrt{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(t+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

利用初期值條件解得 $c_1=\dfrac{\sqrt{7}-7}{168}$ 與 $c_2=\dfrac{-(7+\sqrt{7})}{168}$. 故非齊次微分方程組之特解爲

$$\mathbf{x}(t)=\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 7-\sqrt{7} \\ -7+2\sqrt{7} \end{bmatrix} e^{(3+\sqrt{7})t}+\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 7+\sqrt{7} \\ -7-2\sqrt{7} \end{bmatrix} e^{(3-\sqrt{7})t}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ t+1 \end{bmatrix}$$